DURÉE : 4 heures

On désigne par $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels et par* $\mathfrak{B}$ *l'espace vectoriel des fonctions numériques bornées définies sur* $\mathbb{R}$.

Pour $f \in \mathfrak{B}$, *on pose* $\|f\| = \operatorname{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

Les candidats peuvent utiliser du papier millimétré (4 feuilles).

PRÉLIMINAIRES

A

Soit $f \in \mathfrak{B}$ dérivable et périodique de période T.

1° Montrer que si f a p zéros distincts sur l'intervalle [0, T[, alors sa dérivée f' a au moins p zéros distincts sur l'intervalle [0, T[.

2° Montrer que si f et f' ont exactement p zéros distincts sur l'intervalle [0, T[, ils n'y ont pas de zéro commun.

B

Étant donné $T > 0$, on considère la fonction g_0 définie par

$$g_0(x) = (-1)^p \quad \text{si} \quad pT \leqslant x < (p+1)T,$$

puis la suite des fonctions g_n définies par :

$$g_{2i+1}(x) = \int_{\frac{T}{2}}^{x} g_{2i}(t)\,dt$$

$$g_{2i}(x) = \int_{0}^{x} g_{2i-1}(t)\,dt.$$

1° Montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g_{2i}(-x) = -g_{2i}(x) \text{ et } g_{2i}(T-x) = g_{2i}(x),$$
$$g_{2i+1}(-x) = g_{2i+1}(x) \text{ et } g_{2i+1}(T-x) = -g_{2i+1}(x).$$

2° En déduire que les fonctions g_n sont périodiques de période 2 T.

3° Étudier soigneusement la variation des fonctions g_n.

Tracer ensuite sur papier millimétré les graphes de g_1, g_2, g_3 et g_4.

4° On pose $t_n = \|g_n\|$, en quels points cette valeur est-elle atteinte? Montrer que $\frac{t_n}{T^n}$ est indépendant de T.

Calculer ensuite t_1, t_2, t_3 et t_4.

I

Soit f une fonction périodique de période 2 T n-fois dérivable ($n \geqslant 2$) telle que la dérivée n-ième $f^{(n)}$ de f soit bornée.

1° Montrer que $f \in \mathfrak{B}$ et que pour $1 \leqslant p \leqslant n$ $\quad f^{(p)} \in \mathfrak{B}$.

2° Soit $0 < \lambda < 1$ et $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction h définie par $h(x) = g_n(x) - \lambda f(x - a)$.

a. On suppose que $\|f^{(n)}\| \leqslant 1$.

Étudier la variation de la fonction $h^{(n-1)}$ pour montrer qu'elle s'annule au plus deux fois sur l'intervalle [0, 2 T[.

b. Montrer que si $\|f\| \leqslant t_n$, alors h a au moins deux zéros distincts sur l'intervalle [0, 2 T[.

c. En conclure que si $\|f\| \leqslant t_n$ et $\|f^{(n)}\| \leqslant 1$, alors toutes les dérivées $h^{(p)}$, pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, de la fonction h ont exactement deux zéros.

3° On suppose que $\|f\| \leqslant t_n$ et $\|f^{(n)}\| \leqslant 1$.

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 2T[$ tel que $|f'(x_0)| = \|f'\|$, et $x_1 \in [0, 2T[$ tel que $g'_n(x_1) = \frac{t_{n-1}}{\|f'\|} f'(x_0)$.

.../...

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
Section A_2 (P')
1977
×31×

On considère la fonction k définie par

$$k(x) = g_n(x) - \frac{t_{n-1}}{\|f'\|} f(x + x_0 - x_1).$$

b. Si $n > 2$, montrer que $k''(x_1) = k'(x_1) = 0$ et en déduire que $\|f'\| \leqslant t_{n-1}$.

c. Si $n = 2$, montrer en étudiant la variation de k' que x_1 en est le seul zéro dans l'intervalle [0, 2 T[et en déduire que $\|f'\| \leqslant t_1$.

4° Dans le cas général, calculer une majoration de $\|f'\|$ en fonction de $\|f\|$ et de $\|f^{(n)}\|$ [on pourra utiliser une fonction auxiliaire h de la forme $h(x) = a\, f(bx)$].

5° En déduire que pour $1 \leqslant p \leqslant n - 1$, on a

$$\|f^{(p)}\| \leqslant \|f\|^{1-\frac{p}{n}} \|f^{(n)}\|^{\frac{p}{n}} \frac{t_{n-p}}{(t_n)^{1-\frac{p}{n}}}.$$

II

Soit $f \in \mathcal{B}$ n-fois dérivable ($n \geqslant 2$) telle que $f^{(n)} \in \mathcal{B}$.

1° Construire une fonction n-fois dérivable ayant pour valeur 1, si $x \in [-1, 1]$ et pour valeur 0 si $|x| \geqslant 2$.

(On pourra admettre dans la question suivante l'existence d'une telle fonction.)

2° Soit q une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ n-fois dérivable égale à 1 si $x \in [-1, 1]$ et à 0 si $|x| > 2$, on considère la fonction périodique f_m de période $4m$ telle que ($\|q\| = 1$)

$$f_m(x) = f(x)\, q\left(\frac{x}{m}\right) \text{ pour } |x| \leqslant 2m.$$

Montrer que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, $\lim_{m \to \infty} f_m^{(p)}(x) = f^{(p)}(x)$, puis que

$$\lim_{m \to \infty} \|f_m\| = \|f\| \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} \|f_m^{(n)}\| = \|f^{(n)}\|.$$

3° En déduire que pour $1 \leqslant p \leqslant n-1$, $f^{(p)} \in \mathcal{B}$ et donner une majoration de $\|f^{(p)}\|$.

FIN

×32×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail